

UNIVERSITATEA "OVIDIUS" CONSTANȚA
ȘCOALA DOCTORALĂ DE ȘTIINȚE APLICATE
DOMENIUL DE DOCTORAT MATEMATICĂ

TEZĂ DE DOCTORAT

EVALUĂRI ASIMPTOTICE ÎN TEORIA
ANALITICĂ A NUMERELOR

Conducător științific
Prof. univ. dr. **Dumitru Popa**

Student-doctorand
Magdalena Corciovei
(Bănescu)

CONSTANȚA
2014

EVALUĂRI ASIMPTOTICE ÎN
TEORIA ANALITICĂ A
NUMERELOR

Mulțumiri

Mulțumesc într-un mod cu totul special îndrumatorului meu de doctorat, domnului profesor universitar doctor Dumitru Popa pentru deosebitul efort de a mă sprijini pe tot parcursul doctoratului. Îi sunt recunoscătoare, de asemenea, pentru răbdarea și pasiunea cu care mi-a transmis noțiunile de care aveam nevoie.

Mulțumesc familiei mele pentru încurajările și susținerea pe care mi-au acordat-o. Le mulțumesc părinților mei pentru sprijinul fără de care nu ar fi fost posibilă terminarea acestei teze.

Le mulțumesc, de asemenea, tuturor celor care au avut încredere în mine și m-au susținut.

Cuprins

Prefață	4
1 Rezultate clasice în teoria analitică a numerelor	5
2 Extinderi pentru anumite teoreme clasice din teoria numerelor	6
2.1 Rezultate preliminare	6
2.2 Rezultatele principale	8
2.3 Aplicații	14
3 Evaluări asimptotice pentru unele sume duble din teoria numerelor	18
3.1 Introducere și context	18
3.2 Rezultate principale	20
3.2.1 Rezultate de tip dublu Pölya-Riemann	21
3.2.2 Rezultate de tip dublu Riemann-Radoux	25
Bibliografie	26

Prefață

Lucrarea de față concepută drept teză în vederea obținerii titlului de doctor în matematică, tratează problematica evaluărilor asimptotice în teoria analitică a numerelor.

Prezenta teză de doctorat este structurată în trei capitole pe care le vom prezenta pe scurt în continuare.

Primul capitol cuprinde definiții, noțiuni introductive și rezultate necesare dezvoltărilor ulterioare. Unele rezultate și demonstrații sunt inspirate și detaliate din bibliografia precizată, altele aparțin autoarei. Tot în acest capitol sunt generalizate o serie de rezultate binecunoscute în literatura de specialitate.

În al doilea capitol sunt prezentate rezultatele centrale ale acestei teze de doctorat. Majoritatea rezultatelor din acest capitol apar în articolul: "New extensions of some classical theorems in number theory", publicat de autor împreună cu domnul profesor universitar doctor D. Popa în "Journal of Number Theory" (vezi [4]). Rezultatele din acest capitol generalizează o serie de teoreme celebre din teoria analitică a numerelor, cum ar fi faimoasa teoremă a lui Pölya bazată pe teorema numerelor prime, ca și un rezultat surprinzător a lui Radoux publicat în 1977. Menționăm că un rezultat din acest capitol, enunțat fără demonstrație în articolul din J.N.T. este demonstrat în această teză. Deoarece în articolul din J.N.T. am prezentat ca aplicații numai pe acelea referitoare la numerele prime, lăsând cititorului să formuleze posibile aplicații la rezultatul lui Radoux, în prezenta teză am prezentat și o serie de generalizări ale acestui rezultat.

Cel de al treilea capitol cuprinde rezultate trimise spre posibila publicare la "International Journal of Number Theory" de către autoare împreună cu conducătorul de doctorat Dumitru Popa. În acest capitol indicăm o metodă de a obține evaluări asimptotice pentru sume duble plecând de la evaluări

asimptotice pentru sume simple. Folosind procedeul indicat în teză arătăm că toate rezultatele din articolul [4] pot fi utilizate pentru a obține evaluări asimptotice pentru sume duble. În acest sens prezentăm o serie de rezultate de tip dublu Pölya-Riemann, respectiv de tip dublu Riemann-Radoux.

Capitolul 1

Rezultate clasice în teoria analitică a numerelor

Următorul rezultat a apărut ca urmare a discuției cu conducătorul de doctorat, D. Popa. Din câte cunoaștem el nu apare în literatura de specialitate.

Lema 1.0.1 *Fie $f : [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție arbitrară. Definim $R : [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ prin*

$$R(x) = \sum_{p \leq x} f(p).$$

Atunci pentru orice $x \in [2, \infty)$ are loc egalitatea

$$\sum_{p \leq x} \frac{f(p)}{\ln p} = \sum_{k=2}^x \frac{R(k) - R(k-1)}{\ln k}.$$

Următorul rezultat este util în înțelegerea demonstrațiilor unor teoreme și mi-a fost sugerat de conducătorul de doctorat, D. Popa. Din câte cunoaștem, el nu apare în literatura de specialitate.

Propoziția 1.0.1 *Fie $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție arbitrară. Pentru orice $x \geq 1$ este adevărată următoarea egalitate*

$$\sum_{n \leq x} \sum_{d|n} h\left(d, \frac{n}{d}\right) = \sum_{ij \leq x} h(i, j).$$

Capitolul 2

Extinderi pentru anumite teoreme clasice din teoria numerelor

2.1 Rezultate preliminare

Reamintim binecunoscuta teoremă a lui Riemann.

Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann. Atunci:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Într-un articol clasic din 1917, vezi [24], bazat pe teorema numerelor prime, Pölya a arătat că dacă $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție integrabilă Riemann pe $[0, 1]$, atunci

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \sum_{p \leq x, p \text{ prime}} f\left(\frac{p}{x}\right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

În 1977, vezi [27], Radoux a arătat că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \varphi(k) = \frac{6}{\pi^2} \int_0^1 x f(x) dx,$$

pentru orice funcție $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $xf(x)$ este continuă pe $[0, 1]$, φ este funcția indicator a lui Euler, vezi de asemenea [16] și [22].

În acest capitol vom da generalizarea acestor rezultate și vom arăta că, deși aparent sunt rezultate diferite, acestea spun același lucru, vezi Theorem 2.2.1, Theorem 2.2.5, Theorem 2.2.6, Corollary 2.2.7 și Theorem 2.2.8. Abordarea

noastră este următoarea: în primul rând, vom demonstra rezultatele pentru polinoame, apoi pentru funcții continue și la sfârșit pentru funcții integrabile Riemann.

Rezultatele au fost publicate în articolul din J.N.T., vezi [4].

În scopul de a simplifica prezentarea, vom introduce următoarea definiție.

Definiția 2.1.1 Vom spune că funcția $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ are proprietatea P_μ , cu $\mu \in \mathbb{R}$, dacă există $x_0 > 0$ cu $h(x) > 0$ pentru orice $x \geq x_0$, h este derivabilă pe (x_0, ∞) și $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xh'(x)}{h(x)} = \mu$.

Definiția 2.1.2 Fie $g : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$ o funcție. Funcția $G : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ definită prin $G(x) = \sum_{n \leq x} g(n)$, se numește funcția sumatorie a lui g , vezi [3, page 39].

Următorul rezultat apare în articolul publicat în "Journal of Number Theory", vezi [4] (Proposition 1).

Propoziția 2.1.3 Fie $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ de două ori derivabilă pe $(0, \infty)$ și de asemenea există $x_1 > 0$ cu $f(x) > 0$ și $f'(x) \neq 0$ pentru orice $x \geq x_1$ și

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = C_1 \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf''(x)}{f'(x)} = C_2 \in \mathbb{R}.$$

Fie $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea P_μ și $g : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$ astfel încât funcția sa sumatorie este echivalentă cu h . Dacă $C_1 + \mu > 0$ și $C_2 + \mu > -1$, atunci $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{h(x)f(x)} \sum_{n \leq x} f(n)g(n) = 1 - \frac{C_1}{C_2 + \mu + 1}$.

Următorul rezultat apare în articolul publicat în J.N.T., vezi [4] (Corollary 1).

Corolar 2.1.4 Fie $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea P_μ și $g : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$ astfel încât funcția sumatorie este echivalentă cu h . De asemenea fie $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Atunci pentru orice $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ și orice $\alpha_0 > -\mu$, avem

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{\alpha_0} (\ln_1 x)^{\alpha_1} \dots (\ln_k x)^{\alpha_k} h(x)} \sum_{n \leq x} n^{\alpha_0} (\ln_1 n)^{\alpha_1} \dots (\ln_k n)^{\alpha_k} g(n) = \frac{\mu}{\alpha_0 + \mu}.$$

Următorul rezultat, care este independent, arată că, în ipoteze naturale, în scopul de a demonstra o evaluare asimptotică pentru funcții continue, este suficient a dovedi aceeași evaluare asimptotică într-o mulțime densă. Acest rezultat apare în articolul publicat în J.N.T. vezi [4], (Theorem 1).

Teorema 2.1.5 Fie k un număr natural, $a > 0$ și $T : C([0, 1]^k) \rightarrow \mathcal{F}[a, \infty)$ o funcțională liniară cu proprietatea că există $x_0 \geq a$ și $L > 0$ astfel încât

$$|(T(f))(x)| \leq L \|f\|_u \text{ pentru orice } f \in C([0, 1]^k) \text{ și orice } x \geq x_0$$

și $V : C([0, 1]^k) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcțională liniară și mărginită. În plus, presupunem că există $A \subset C([0, 1]^k)$, A densă în $C([0, 1]^k)$, astfel încât

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (T(f))(x) = V(f) \text{ pentru orice } f \in A.$$

Atunci

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (T(f))(x) = V(f) \text{ pentru orice } f \in C([0, 1]^k).$$

Următorul rezultat apare în articolul publicat în J.N.T., vezi [4], (Lemma 1), la data publicării articolului autorii negăsind rezultatul în mod explicit. Ulterior, ei au găsit că rezultatul este folosit, tot fără demonstrație, în [23] (Theorem 1, pag.4) și în [18] (Theorem 1.1, pag.2-3).

Lema 2.1.1 Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există două funcții continue $\varphi, \psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x), \forall x \in [0, 1] \text{ și } \int_0^1 (\psi(x) - \varphi(x)) dx \leq \varepsilon.$$

2.2 Rezultatele principale

Vom începe cu un rezultat care poate fi considerat ca o versiune multidimensională a teoremei funcțiilor continue a lui Pölya, vezi Theorem 2.2.5, Theorem 2.2.6, Corollary 2.2.7. Rezultatul apare în lucrarea publicată de autoare împreună cu conducătorul de doctorat, D.Popa, vezi [4], ca [4], (Theorem 2).

Teorema 2.2.1 Fie $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea P_1 și $g : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$ astfel încât funcția sa sumatorie este echivalentă cu h . De asemenea fie $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Atunci pentru orice funcție continuă $f : [0, 1]^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$, avem

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{h(x)} \sum_{n \leq x} f\left(\frac{n}{x}, \frac{\ln_1 n}{\ln_1 x}, \dots, \frac{\ln_k n}{\ln_k x}\right) g(n) = \int_0^1 f(x, \underbrace{1, \dots, 1}_{k\text{-ori}}) dx.$$

Theorem 2.2.1 ne sugereaza următoarea definiție.

Definiția 2.2.2 Fie $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea P_1 și $g : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$ astfel încât funcția sumatorie este echivalentă cu h . Pentru orice $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, vom nota cu $\mathcal{F}_k([0, 1]^{k+1}, g, h)$ clasa tuturor funcțiilor integrabile Riemann $f : [0, 1]^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{h(x)} \sum_{n \leq x} f\left(\frac{n}{x}, \frac{\ln_1 n}{\ln_1 x}, \dots, \frac{\ln_k n}{\ln_k x}\right) g(n) = \int_0^1 f(x, \underbrace{1, \dots, 1}_{k\text{-ori}}) dx.$$

Din Theorem 2.2.1 obținem următorul rezultat care apare în articolul publicat în J.N.T., vezi [4], (Corollary 2).

Corolar 2.2.3 Fie $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea P_1 și $g : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$ astfel încât funcția sa sumatorie este echivalentă cu h . Atunci pentru orice $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, avem

$$C([0, 1]^{k+1}) \subset \mathcal{F}_k([0, 1]^{k+1}, g, h) \subset \mathcal{R}([0, 1]^{k+1}).$$

Următorul exemplu arată că pentru $k \in \mathbb{N}$ incluziunea

$$\mathcal{F}_k([0, 1]^{k+1}, g, h) \subset \mathcal{R}([0, 1]^{k+1})$$

este, în general, strictă, vezi [4].

Următorul rezultat apare în articolul publicat în J.N.T., vezi [4], (Proposition 2).

Propoziția 2.2.4 Fie $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea P_1 și $g : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$ astfel încât funcția sa sumatorie este echivalentă cu h . Mai departe presupunem că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{h(n)} = 0$. De exemplu $g(n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ și $h(x) = x, \forall x > 0$. Fie $k \in \mathbb{N}$. Atunci $f : [0, 1]^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ definită că

$$f(x_0, x_1, \dots, x_k) = \chi_{\{1\}}(x_1)$$

este integrabilă Riemann pe $[0, 1]^{k+1}$ și

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{h(x)} \sum_{n \leq x} f\left(\frac{n}{x}, \frac{\ln_1 n}{\ln_1 x}, \dots, \frac{\ln_k n}{\ln_k x}\right) g(n) = 0; \quad \int_0^1 f(x, \underbrace{1, \dots, 1}_{k\text{-ori}}) dx = 1.$$

În continuare, vom da unele exemple netriviiale de funcții care aparțin claselor $\mathcal{F}_k([0, 1]^{k+1}, g, h)$. Acest rezultat apare în articolul publicat în J.N.T., vezi [4], (Theorem 3).

Teorema 2.2.5 Fie $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea P_1 și fie $g : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$ astfel încât funcția sa sumatorie este echivalentă cu h . De asemenea fie $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Atunci pentru orice funcție integrabilă Riemann $\omega : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, orice funcții continue $v_1 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, ..., $v_k : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ cu $v_1(1) \cdots v_k(1) \neq 0$, funcția $f : [0, 1]^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ definită ca

$$f(x_0, x_1, \dots, x_k) = \omega(x_0 v_1(x_1) \cdots v_k(x_k))$$

apartține clasei $\mathcal{F}_k([0, 1]^{k+1}, g, h)$.

Următorul rezultat apare în articolul publicat în J.N.T., vezi [4], (Theorem 4).

Teorema 2.2.6 Fie $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea P_1 și fie $g : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$ astfel încât funcția sa sumatorie este echivalentă cu h . De asemenea fie $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dacă $v_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann, $v_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, ..., $v_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ pentru orice funcții continue, atunci funcția $f : [0, 1]^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x_0, x_1, \dots, x_k) = v_0(x_0) v_1(x_1) \cdots v_k(x_k)$$

apartține clasei $\mathcal{F}_k([0, 1]^{k+1}, g, h)$.

Din Teorema 2.2.5 și Teorema 2.2.6 avem, în particular următorul rezultat care apare în articolul publicat în J.N.T., vezi [4], (Corollary 3).

Corolar 2.2.7 Fie $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea P_1 și fie $g : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$ astfel încât funcția sa sumatorie este echivalentă cu h . Fie $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Atunci:

(i) $\mathcal{F}_0([0, 1], g, h) = \mathcal{R}([0, 1])$ i.e. pentru orice funcție integrabilă Riemann $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ avem

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{h(x)} \sum_{n \leq x} f\left(\frac{n}{x}\right) g(n) = \int_0^1 f(x) dx.$$

(ii) Dacă $\omega : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann, $v_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, ..., $v_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții continue cu $v_1(1) \cdots v_k(1) \neq 0$ avem

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{h(x)} \sum_{n \leq x} \omega\left(\frac{n}{x} \cdot v_1\left(\frac{\ln_1 n}{\ln_1 x}\right) \cdots v_k\left(\frac{\ln_k n}{\ln_k x}\right)\right) g(n) = \int_0^1 \omega(x \cdot v_1(1) \cdots v_k(1)) dx.$$

(iii) Dacă $v_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann, $v_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, ..., $v_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții continue avem

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{h(x)} \sum_{n \leq x} v_0 \left(\frac{n}{x} \right) v_1 \left(\frac{\ln_1 n}{\ln_1 x} \right) \cdots v_k \left(\frac{\ln_k n}{\ln_k x} \right) g(n) = v_1(1) \cdots v_k(1) \int_0^1 v_0(x) dx.$$

Următorul rezultat este o noua extindere a teoremei lui Radoux. El apare în articolul publicat în J.N.T., vezi [4], (Theorem 5).

Teorema 2.2.8 Fie $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea P_μ , cu $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$ și fie $g : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$ astfel încât funcția sa sumatorie este echivalentă cu h . De asemenea fie $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Atunci:

(i) pentru orice $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, și orice funcție continuă $\varphi : [0, 1]^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ avem

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n \leq x} \varphi \left(\frac{n}{x}, \frac{\ln_1 n}{\ln_1 x}, \dots, \frac{\ln_k n}{\ln_k x} \right) n^{1-\mu} (\ln_1 n)^{\alpha_1} \cdots (\ln_k n)^{\alpha_k} g(n)}{x^{1-\mu} (\ln_1 x)^{\alpha_1} \cdots (\ln_k x)^{\alpha_k} h(x)} \\ &= \mu \int_0^1 \varphi(x, \underbrace{1, \dots, 1}_{k\text{-ori}}) dx. \end{aligned}$$

(ii) Dacă $\mu \in (1, \infty)$, pentru orice funcție $f : [0, 1]^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $(x_0, x_1, \dots, x_k) \rightarrow x_0^{\mu-1} f(x_0, x_1, \dots, x_k)$ este continuă pe $[0, 1]^{k+1}$ și oricare ar fi

$\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ avem

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n \leq x} f \left(\frac{n}{x}, \frac{\ln_1 n}{\ln_1 x}, \dots, \frac{\ln_k n}{\ln_k x} \right) (\ln_1 n)^{\alpha_1} \cdots (\ln_k n)^{\alpha_k} g(n)}{(\ln_1 x)^{\alpha_1} \cdots (\ln_k x)^{\alpha_k} h(x)} \\ &= \mu \int_0^1 x^{\mu-1} f(x, \underbrace{1, \dots, 1}_{k\text{-ori}}) dx. \end{aligned}$$

(iii) Dacă $\mu \in (1, \infty)$, pentru orice funcție $f : [0, 1]^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $(x_0, x_1, \dots, x_k) \rightarrow x_1^{\mu-1} f(x_0, x_1, \dots, x_k)$ este continuă pe $[0, 1]^{k+1}$ și oricare ar fi $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ avem

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n \leq x} f \left(\frac{n}{x}, \frac{\ln_1 n}{\ln_1 x}, \dots, \frac{\ln_k n}{\ln_k x} \right) n^{1-\mu} (\ln_1 n)^{\mu-1} (\ln_1 n)^{\alpha_1} \cdots (\ln_k n)^{\alpha_k} g(n)}{x^{1-\mu} (\ln_1 x)^{\mu-1} (\ln_1 x)^{\alpha_1} \cdots (\ln_k x)^{\alpha_k} h(x)} \\ &= \mu \int_0^1 f(x, \underbrace{1, \dots, 1}_{k\text{-ori}}) dx. \end{aligned}$$

(iv) pentru orice funcție integrabilă Riemann $\omega : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, oricare ar fi funcțiile continue $v_1 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, ..., $v_k : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ cu $v_1(1) \cdots v_k(1) \neq 0$ avem

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n \leq x} \omega\left(\frac{n}{x} \cdot v_1\left(\frac{\ln_1 n}{\ln_1 x}\right) \cdots v_k\left(\frac{\ln_k n}{\ln_k x}\right)\right) n^{1-\mu} (\ln_1 n)^{\alpha_1} \cdots (\ln_k n)^{\alpha_k} g(n)}{x^{1-\mu} (\ln_1 x)^{\alpha_1} \cdots (\ln_k x)^{\alpha_k} h(x)} \\ &= \mu \int_0^1 \omega(x \cdot v_1(1) \cdots v_k(1)) dx. \end{aligned}$$

(v) pentru orice funcție integrabilă Riemann $v_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, oricare ar fi funcțiile continue $v_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, ..., $v_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n \leq x} n^{1-\mu} v_0\left(\frac{n}{x}\right) (\ln_1 n)^{\alpha_1} v_1\left(\frac{\ln_1 n}{\ln_1 x}\right) \cdots (\ln_k n)^{\alpha_k} v_k\left(\frac{\ln_k n}{\ln_k x}\right) g(n)}{x^{1-\mu} (\ln_1 x)^{\alpha_1} \cdots (\ln_k x)^{\alpha_k} h(x)} \\ &= \mu v_1(1) \cdots v_k(1) \int_0^1 v_0(x) dx. \end{aligned}$$

(vi) Dacă $\mu \in (1, \infty)$, pentru orice funcție $u_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $x \rightarrow x^{\mu-1} u_0(x)$ este integrabilă Riemann, oricare ar fi funcțiile continue $v_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, ..., $v_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n \leq x} u_0\left(\frac{n}{x}\right) (\ln_1 n)^{\alpha_1} v_1\left(\frac{\ln_1 n}{\ln_1 x}\right) \cdots (\ln_k n)^{\alpha_k} v_k\left(\frac{\ln_k n}{\ln_k x}\right) g(n)}{(\ln_1 x)^{\alpha_1} \cdots (\ln_k x)^{\alpha_k} h(x)} \\ &= \mu v_1(1) \cdots v_k(1) \int_0^1 x^{\mu-1} u_0(x) dx. \end{aligned}$$

Vom da în continuare câteva exemple, ca aplicații la Teorema 2.2.8. Din câte cunoaștem rezultatele nu apar în literatura de specialitate.

Pentru $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$, funcția indicator a lui Euler, avem:

$$\sum_{n \leq x} \varphi(n) \sim \frac{3}{\pi^2} x^2 \text{ când } x \rightarrow \infty.$$

Propoziția 2.2.9 Fie $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Atunci:

(i) pentru orice funcție $f : [0, 1]^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $(x_0, x_1, \dots, x_k) \rightarrow x_0 f(x_0, x_1, \dots, x_k)$ este continuă pe $[0, 1]^{k+1}$ și oricare ar fi

$\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ avem

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n \leq x} f\left(\frac{n}{x}, \frac{\ln_1 n}{\ln_1 x}, \dots, \frac{\ln_k n}{\ln_k x}\right) (\ln_1 n)^{\alpha_1} \dots (\ln_k n)^{\alpha_k} \varphi(n)}{(\ln_1 x)^{\alpha_1} \dots (\ln_k x)^{\alpha_k} x^2} \\ &= \frac{6}{\pi^2} \int_0^1 x f(x, \underbrace{1, \dots, 1}_{k\text{-ori}}) dx. \end{aligned}$$

(ii) pentru orice funcție $f : [0, 1]^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $(x_0, x_1, \dots, x_k) \rightarrow x_1 f(x_0, x_1, \dots, x_k)$ este continuă pe $[0, 1]^{k+1}$ și oricare ar fi $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ avem

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n \leq x} f\left(\frac{n}{x}, \frac{\ln_1 n}{\ln_1 x}, \dots, \frac{\ln_k n}{\ln_k x}\right) n^{-1} (\ln_1 n)^{\alpha_1} \dots (\ln_k n)^{\alpha_k} \varphi(n)}{x (\ln_1 x)^{\alpha_1} \dots (\ln_k x)^{\alpha_k}} \\ &= \frac{6}{\pi^2} \int_0^1 f(x, \underbrace{1, \dots, 1}_{k\text{-ori}}) dx. \end{aligned}$$

(iii) pentru orice funcție $u_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $x \rightarrow xu_0(x)$ este integrabilă Riemann, oricare ar fi funcțiile continue $v_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \dots, v_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ și oricare ar fi $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ avem

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n \leq x} u_0\left(\frac{n}{x}\right) (\ln_1 n)^{\alpha_1} v_1\left(\frac{\ln_1 n}{\ln_1 x}\right) \dots (\ln_k n)^{\alpha_k} v_k\left(\frac{\ln_k n}{\ln_k x}\right) \varphi(n)}{(\ln_1 x)^{\alpha_1} \dots (\ln_k x)^{\alpha_k} x^2} \\ &= \frac{6}{\pi^2} v_1(1) \dots v_k(1) \int_0^1 xu_0(x) dx. \end{aligned}$$

Pentru $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$, funcția indicator a lui Euler, avem:

$$\sum_{n \leq x} \frac{\varphi(n)}{n^\alpha} \sim \frac{6x^{2-\alpha}}{\pi^2(2-\alpha)} \text{ când } x \rightarrow \infty \text{ și } \alpha < 1.$$

Propoziția 2.2.10 Fie $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Atunci:

(i) pentru orice funcție $f : [0, 1]^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $(x_0, x_1, \dots, x_k) \rightarrow x_0^{1-\alpha} f(x_0, x_1, \dots, x_k)$ este continuă pe $[0, 1]^{k+1}$ și oricare ar fi $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ și $\alpha < 1$ avem

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n \leq x} f\left(\frac{n}{x}, \frac{\ln_1 n}{\ln_1 x}, \dots, \frac{\ln_k n}{\ln_k x}\right) (\ln_1 n)^{\alpha_1} \dots (\ln_k n)^{\alpha_k} \frac{\varphi(n)}{n^\alpha}}{(\ln_1 x)^{\alpha_1} \dots (\ln_k x)^{\alpha_k} x^{2-\alpha}} \\ &= \frac{6}{\pi^2} \int_0^1 x^{1-\alpha} f(x, \underbrace{1, \dots, 1}_{k\text{-ori}}) dx. \end{aligned}$$

(ii) pentru orice funcție $f : [0, 1]^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $(x_0, x_1, \dots, x_k) \rightarrow x_1^{1-\alpha} f(x_0, x_1, \dots, x_k)$ este continuă pe $[0, 1]^{k+1}$ și oricare ar fi $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ și $\alpha < 1$ avem

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n \leq x} f\left(\frac{n}{x}, \frac{\ln_1 n}{\ln_1 x}, \dots, \frac{\ln_k n}{\ln_k x}\right) n^{-1} (\ln_1 n)^{1-\alpha} (\ln_1 n)^{\alpha_1} \dots (\ln_k n)^{\alpha_k} \varphi(n)}{x (\ln_1 x)^{1-\alpha} (\ln_1 x)^{\alpha_1} \dots (\ln_k x)^{\alpha_k}} \\ = \frac{6}{\pi^2} \int_0^1 f(x, \underbrace{1, \dots, 1}_{k\text{-ori}}) dx.$$

(iii) pentru orice funcție integrabilă Riemann $v_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, oricare ar fi funcțiile continue $v_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, ..., $v_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ și oricare ar fi $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ avem

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n \leq x} n^{-1} v_0\left(\frac{n}{x}\right) (\ln_1 n)^{\alpha_1} v_1\left(\frac{\ln_1 n}{\ln_1 x}\right) \dots (\ln_k n)^{\alpha_k} v_k\left(\frac{\ln_k n}{\ln_k x}\right) \varphi(n)}{x (\ln_1 x)^{\alpha_1} \dots (\ln_k x)^{\alpha_k}} \\ = \frac{6}{\pi^2} v_1(1) \dots v_k(1) \int_0^1 v_0(x) dx.$$

În continuare reamintim, vezi [6, 28]:

(i) o funcție $l : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ se numește funcție cu variație lentă (în sens Karamata) dacă este măsurabilă, există $x_0 > 0$ cu $l(x) > 0$ pentru orice $x \geq x_0$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{l(ax)}{l(x)} = 1$, $\forall a > 0$.

(ii) Fie $\mu \in \mathbb{R}$. funcția $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ se numește cu variație regulată cu index μ dacă este măsurabilă și există $l : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu variație lentă astfel încât $h(x) = x^\mu l(x)$, $\forall x > 0$.

În primul său raport asupra lucrării [4] referentul ne-a sugerat să studiem legătura cu funcțiile cu variație lentă. Acest rezultat apare în articolul publicat în J.N.T., vezi [4], (Lemma 2) și este răspunsul pe care autorii l-au dat referentului.

Lema 2.2.1 Fie $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea P_μ , cu $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$ și fie $g : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$ astfel încât funcția sa sumatorie este echivalentă cu h . Atunci h cu variație regulată cu index μ .

2.3 Aplicații

În acest subcapitol, vom aplica rezultatele demonstrate mai sus i.e. Teorema 2.2.1, Teorema 2.2.5, Teorema 2.2.6 și Corolarul 2.2.7, pentru câteva

funcții aritmetice, binecunoscute în teoria numerelor, vezi [1, 3, 17, 20]. Ne vom concentra numai asupra cazului corespunzător funcțiilor sumatorii peste numerele prime.

În continuare vom nota cu $\mathbb{P}$ mulțimea tuturor numerelor prime și cu $\sum_{p \leq x} \dots$ pentru $\sum_{p \leq x, p \text{ prime}} \dots$.

Definiția 2.3.1 Fie $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea P_μ . Vom spune că $v : \mathbb{P} \rightarrow [0, \infty)$ funcția sa sumatorie peste numerele prime este echivalentă cu h dacă și numai dacă $\sum_{p \leq x} v(p) \sim h(x)$ când $x \rightarrow \infty$.

Următorul rezultat, care stabilește o legătură între funcția sumatorie peste mulțimea numerelor naturale și funcția sumatorie peste mulțimea numerelor prime, este probabil cunoscut, dar nu l-am găsit explicit în literatura de specialitate. El apare în articolul publicat de autoare împreună cu conducătorul de doctorat D. Popa, vezi [4], fără demonstrație. Demonstrația dată aici este inspirată din Landau, vezi [20, pag. 25].

Lema 2.3.1 Fie $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ astfel încât $\left(\frac{f(n)}{\ln n}\right)_{n \geq 2}$ este un șir descrescător și seria $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f(n)}{\ln n}$ este divergentă. Atunci $\sum_{p \leq x} f(p) \sim \sum_{n \leq x} \frac{f(n)}{\ln n}$ când $x \rightarrow \infty$.

Definiția 2.3.2 Fie $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea P_μ și $v : \mathbb{P} \rightarrow [0, \infty)$ astfel încât funcția sa sumatorie peste numerele prime este echivalentă cu h . De asemenea fie $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Notăm cu $\mathcal{F}_k^{\text{prime}}([0, 1]^{k+1}, v, h)$ clasa tuturor funcțiilor integrabile Riemann $f : [0, 1]^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{h(x)} \sum_{p \leq x} f\left(\frac{p}{x}, \frac{\ln_1 p}{\ln_1 x}, \dots, \frac{\ln_k p}{\ln_k x}\right) v(p) = \int_0^1 f(x, \underbrace{1, \dots, 1}_{k\text{-ori}}) dx.$$

Rezultatul următor spune că dacă știm un rezultat pentru fiecare funcție sumatorie peste mulțimea tuturor numerelor naturale, atunci putem obține un rezultat similar pentru fiecare funcție sumatorie peste numerele prime. Rezultatul a fost publicat în J.N.T., vezi [4], (proposition 3).

Propoziția 2.3.3 Fie $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea P_μ . Fie $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dacă $f \in \mathcal{F}_k([0, 1]^{k+1}, g, h)$ pentru orice $g : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$ astfel încât funcția sa sumatorie este echivalentă cu h , atunci $f \in \mathcal{F}_k^{\text{prime}}([0, 1]^{k+1}, v, h)$ pentru orice $v : \mathbb{P} \rightarrow [0, \infty)$ astfel încât funcția sa sumatorie peste mulțimea numerelor prime este echivalentă cu h .

Următorul rezultat este o generalizare a clasicei teoreme a lui Pölya. Demonstrația rezultă din Corolarul 2.2.7 și Propoziția 2.3.3. Rezultatul apare în articolul din J.N.T., vezi [4], (Corollary 4).

Corolar 2.3.4 *Fie $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea P_1 și $v : \mathbb{P} \rightarrow [0, \infty)$ astfel încât funcția sa sumatorie peste numerele prime este echivalentă cu h . De asemenea fie $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Atunci:*

(i) $\mathcal{F}_0^{\text{prime}}([0, 1], g, h) = \mathcal{R}([0, 1])$ i.e. pentru orice funcție integrabilă Riemann $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ avem

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{h(x)} \sum_{p \leq x} f\left(\frac{p}{x}\right) v(p) = \int_0^1 f(x) dx.$$

(ii) pentru orice funcții continue $f : [0, 1]^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{h(x)} \sum_{p \leq x} f\left(\frac{p}{x}, \frac{\ln_1 p}{\ln_1 x}, \dots, \frac{\ln_k p}{\ln_k x}\right) v(p) = \int_0^1 f(x, \underbrace{1, \dots, 1}_{k\text{-ori}}) dx.$$

(iii) pentru orice funcție integrabilă Riemann $\omega : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, orice funcții continue $v_1 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, ..., $v_k : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ cu $v_1(1) \cdots v_k(1) \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{h(x)} \sum_{p \leq x} \omega\left(\frac{p}{x} \cdot v_1\left(\frac{\ln_1 p}{\ln_1 x}\right) \cdots v_k\left(\frac{\ln_k p}{\ln_k x}\right)\right) v(p) =$$

$$\int_0^1 \omega(x \cdot v_1(1) \cdots v_k(1)) dx.$$

(iv) pentru orice funcție integrabilă Riemann $v_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, orice funcții continue $v_1 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, ..., $v_k : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{h(x)} \sum_{p \leq x} v_0\left(\frac{p}{x}\right) v_1\left(\frac{\ln_1 p}{\ln_1 x}\right) \cdots v_k\left(\frac{\ln_k p}{\ln_k x}\right) v(p) = v_1(1) \cdots v_k(1) \int_0^1 v_0(x) dx.$$

În continuare, dăm câteva cazuri particulare pentru Corolarul 2.3.4. Reamintim că pentru $v : \mathbb{P} \rightarrow [0, \infty)$, $v(p) = 1$, funcția sa sumatorie peste numerele prime este $\pi : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$ și din teorema numerelor prime,

$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$ as $x \rightarrow \infty$, vezi [17, 20].

De asemenea, pentru $v : \mathbb{P} \rightarrow [0, \infty)$, $v(p) = \ln p$, funcția sa sumatorie peste numerele prime este $\vartheta : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p$, prima funcție

a lui Chebyshev și din teorema numerelor prime, $\vartheta(x) \sim x$ când $x \rightarrow \infty$, vezi [17, 20].

Aplicând Corolarul 2.3.4 pentru această funcție obținem următorul rezultat care a fost publicat de către autoare împreună cu conducătorul de doctorat D. Popa, ‘în J.N.T. vezi [4], (corollary 5):

Corolar 2.3.5 *Fie $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Atunci:*

(i) *pentru orice funcție continuă $f : [0, 1]^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \sum_{p \leq x} f\left(\frac{p}{x}, \frac{\ln_1 p}{\ln_1 x}, \dots, \frac{\ln_k p}{\ln_k x}\right) &= \int_0^1 f(x, \underbrace{1, \dots, 1}_{k\text{-ori}}) dx; \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{p \leq x} f\left(\frac{p}{x}, \frac{\ln_1 p}{\ln_1 x}, \dots, \frac{\ln_k p}{\ln_k x}\right) \ln p &= \int_0^1 f(x, \underbrace{1, \dots, 1}_{k\text{-ori}}) dx. \end{aligned}$$

(ii) *pentru orice funcție integrabilă Riemann $\omega : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ și orice funcții continue $v_1 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, ..., $v_k : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ cu $v_1(1) \cdots v_k(1) \neq 0$, avem*

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \sum_{p \leq x} \omega\left(\frac{p}{x} \cdot v_1\left(\frac{\ln_1 p}{\ln_1 x}\right) \cdots v_k\left(\frac{\ln_k p}{\ln_k x}\right)\right) \\ &= \int_0^1 \omega(x \cdot v_1(1) \cdots v_k(1)) dx; \\ &\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{p \leq x} \omega\left(\frac{p}{x} \cdot v_1\left(\frac{\ln_1 p}{\ln_1 x}\right) \cdots v_k\left(\frac{\ln_k p}{\ln_k x}\right)\right) \ln p \\ &= \int_0^1 \omega(x \cdot v_1(1) \cdots v_k(1)) dx. \end{aligned}$$

(iii) *pentru orice funcție integrabilă Riemann $v_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ și orice funcții continue $v_1 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, ..., $v_k : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$,*

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \sum_{p \leq x} v_0\left(\frac{p}{x}\right) v_1\left(\frac{\ln_1 p}{\ln_1 x}\right) \cdots v_k\left(\frac{\ln_k p}{\ln_k x}\right) \\ &= v_1(1) \cdots v_k(1) \int_0^1 v_0(x) dx; \\ &\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{p \leq x} v_0\left(\frac{p}{x}\right) v_1\left(\frac{\ln_1 p}{\ln_1 x}\right) \cdots v_k\left(\frac{\ln_k p}{\ln_k x}\right) \ln p \\ &= v_1(1) \cdots v_k(1) \int_0^1 v_0(x) dx. \end{aligned}$$

Capitolul 3

Evaluări asimptotice pentru unele sume duble din teoria numerelor

3.1 Introducere și context

Comportamentul asimptotic pentru diferite sume este una dintre problemele fundamentale în analiza matematică, teoria numerelor și nu numai. Rezultate diferite și profunde de acest tip pot fi găsite, de exemplu, în cărțile lui Bateman-Diamond [3], Landau [20] și Tenenbaum [31]. În continuare vom indica o metodă de a obține evaluări asimptotice pentru sume duble din evaluările asimptotice pentru sume simple, Teorema 3.2.1, Propoziția 3.2.2 și Corolarul 3.2.3. Ca aplicații arătăm că toate rezultatele din articolul scris de autoare împreună cu conducătorul de doctorat, Dumitru Popa, vezi [4] pot fi folosite pentru a obține unele evaluări asimptotice pentru sume duble, vezi Corolarul 3.2.5. Folosind un rezultat vechi a lui Landau din 1900, am obținut un nou rezultat de tipul Pölya - Riemann pentru sume duble, vezi Corolarul 3.2.8, Corolarul 3.2.9. De asemenea, ca aplicație concretă prezentăm o serie de rezultate care implică funcția numărului divizorilor și funcția indicatorul lui Euler, vezi Corolarul 3.2.10 și Corolarul 3.2.12. O altă aplicație a rezultatelor generale obținute se referă la versiuni duble pentru rezultate de tip Riemann-Radoux. Dacă $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție pentru care există $x_0 > 0$ astfel încât $h(x) \neq 0$ oricare ar fi $x \geq x_0$ vom spune că h este nenulă. De asemenea dacă $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este nenulă și $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, vom spune că funcția sumatorie a lui g este echivalentă cu h dacă $\sum_{n \leq x} g(n) \sim h(x)$.

Definiția 3.1.1 Fie $u : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție arbitrară. Funcția

$G : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definită ca $G(x) = \sum_{ij \leq x} u(i, j)$ se numește funcția dublă

sumatorie asociată lui u .

În mod similar, dacă $A, B \subseteq \mathbb{N}$ și $v : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție arbitrară, funcția sumatorie dublă $G_{A,B} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ca $G_{A,B}(x) = \sum_{ij \leq x, (i,j) \in A \times B} v(i, j)$.

Dacă $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este nenulă, $A, B \subseteq \mathbb{N}$ și $v : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$, vom spune că funcția dublă sumatorie a lui v este echivalentă h dacă

$$\sum_{ij \leq x, (i,j) \in A \times B} v(i, j) \sim h(x).$$

Propoziția 3.1.2 Fie $u : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție arbitrară. Oricare ar fi $x \geq 1$ avem următoarea egalitate:

$$\sum_{ij \leq x} u(i, j) = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} u\left(d, \frac{n}{d}\right).$$

Cu alte cuvinte, dacă $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definită ca $g(n) = \sum_{d|n} u\left(d, \frac{n}{d}\right)$, atunci funcția sumatorie dublă a lui u este egală cu funcția sumatorie a lui g .

Corolar 3.1.3 (a) Fie $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție arbitrară. Oricare ar fi $x \geq 1$ avem următoarea egalitate $\sum_{n \leq x} f(n) d(n) = \sum_{ij \leq x} f(ij)$.

(b) Fie $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții arbitrare. Atunci, oricare ar fi $x \geq 1$ avem următoarea egalitate $\sum_{n \leq x} \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{ij \leq x} f(i) g(j)$; cu alte cuvinte, dacă $f * g$ este convoluția Dirichlet dintre f și g , atunci $\sum_{n \leq x} (f * g)(n) = \sum_{ij \leq x} f(i) g(j)$.

În continuare vom afla unele evaluări asimptotice pentru funcția numărul divizorilor și funcția indicatorul lui Euler.

Propoziția 3.1.4 Avem următoarea evaluare asimptotică pentru funcția numărul divizorilor:

$$\sum_{n \leq x} \frac{d(n) \ln n}{n} = \frac{1}{3} \ln^3 x + C \ln^2 x + O(\ln x),$$

unde C este constanta lui Euler.

Propoziția 3.1.5 *Avem următoarele evaluări asimptotice:*

(i)

$$\sum_{ij \leq x} \varphi(i) \varphi(j) = \frac{18x^2 \ln x}{\pi^4} + \frac{(36C - 6A\pi^2 - 9)x^2}{\pi^4} + O(x\sqrt{x} \ln x),$$

unde C este constanta lui Euler și $A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n) \ln n}{n^2}$.

(ii)

$$\sum_{ij \leq x} d(i) d(j) = \frac{x \ln^3 x}{6} + \frac{(4C - 1)x \ln^2 x}{2} + O(x \ln x),$$

unde C este constanta lui Euler.

(iii)

$$\sum_{ij \leq x} d(i) \varphi(j) = \frac{\pi^2 x^2}{12} + O(x\sqrt{x} \ln x)$$

.

3.2 Rezultate principale

Următorul rezultat arată că, dacă știm o evaluare asimptotică pentru o sumă de o "singură variabilă" putem obține o evaluare asimptotică pentru o sumă de "două variabile".

Teorema 3.2.1 *Fie $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție, eventual nenulă, și fie $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dacă $f : [0, 1]^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție cu proprietatea că există*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{h(x)} \sum_{n \leq x} f\left(\frac{n}{x}, \frac{\ln_1 n}{\ln_1 x}, \dots, \frac{\ln_k n}{\ln_k x}\right) g(n) = L(f) \in \mathbb{R}$$

oricare ar fi $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât funcția sa sumatorie este echivalentă cu h , unde $L(f)$ depinde doar de f , atunci

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{h(x)} \sum_{ij \leq x} f\left(\frac{ij}{x}, \frac{\ln_1(ij)}{\ln_1 x}, \dots, \frac{\ln_k(ij)}{\ln_k x}\right) u(i, j) = L(f)$$

oricare ar fi $u : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât funcția sa sumatorie dublă este echivalentă cu h .

Rezultatul următor, euristic vorbind, spune că dacă știm un rezultat pentru orice funcție sumatorie dublă pe $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, atunci putem deduce un rezultat similar pentru orice funcție sumatorie dublă peste produsul cartezian a două submulțimi de numere naturale.

Propoziția 3.2.2 Fie $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care este eventual nenulă și fie $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dacă $f : [0, 1]^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție cu proprietatea că există

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{h(x)} \sum_{ij \leq x} f\left(\frac{ij}{x}, \frac{\ln_1(ij)}{\ln_1 x}, \dots, \frac{\ln_k(ij)}{\ln_k x}\right) u(i, j) = L(f) \in \mathbb{R}$$

pentru orice $u : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care funcția sa sumatorie dublă este echivalentă cu h , unde $L(f)$ depinde doar de f , atunci

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{h(x)} \sum_{ij \leq x, (i,j) \in A \times B} f\left(\frac{ij}{x}, \frac{\ln_1(ij)}{\ln_1 x}, \dots, \frac{\ln_k(ij)}{\ln_k x}\right) v(i, j) = L(f)$$

pentru orice $A, B \subseteq \mathbb{N}$ și orice $v : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care funcția sa sumatorie dublă este echivalentă cu h .

Din Teorema 3.2.1 și Propoziția 3.2.2 avem următorul corolar.

Corolar 3.2.3 Fie $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție eventual nenulă și fie $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dacă $f : [0, 1]^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție cu proprietatea că există

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{h(x)} \sum_{n \leq x} f\left(\frac{n}{x}, \frac{\ln_1 n}{\ln_1 x}, \dots, \frac{\ln_k n}{\ln_k x}\right) g(n) = L(f) \in \mathbb{R}$$

pentru orice $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ a cărei funcție sumatorie dublă este echivalentă cu h , unde $L(f)$ depinde doar de f , atunci

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{h(x)} \sum_{ij \leq x, (i,j) \in A \times B} f\left(\frac{ij}{x}, \frac{\ln_1(ij)}{\ln_1 x}, \dots, \frac{\ln_k(ij)}{\ln_k x}\right) v(i, j) = L(f)$$

pentru orice $A, B \subseteq \mathbb{N}$ și orice $v : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care funcția sa sumatorie dublă este echivalentă cu h .

3.2.1 Rezultate de tip dublu Pölya-Riemann

În continuare, vom demonstra unele rezultate care, din motive evidente le vom numi rezultate duble de tip Pölya-Riemann, a se vedea [4, 24]. Pentru aceasta reamintesc următoarea definiție, a se vedea [4] [Definiție 1].

Definiția 3.2.4 Vom spune că funcția $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ are proprietatea P_μ , unde $\mu \in \mathbb{R}$, dacă există $x_0 > 0$ astfel încât $h(x) > 0$ pentru orice $x \geq x_0$, h este diferențiabilă pe (x_0, ∞) și $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xh'(x)}{h(x)} = \mu$.

Corolar 3.2.5 Fie $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea P_1 . Fie de asemenea $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $A, B \subseteq \mathbb{N}$ și $v : A \times B \rightarrow [0, \infty)$ astfel încât funcția sa sumatorie dublă este echivalentă cu h . Atunci:

(i) pentru orice funcție integrabilă Riemann $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ avem următoarea egalitate

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{h(x)} \sum_{ij \leq x, (i,j) \in A \times B} f\left(\frac{ij}{x}\right) v(i, j) = \int_0^1 f(x) dx.$$

(ii) Dacă $\omega : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann, $v_1 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, ..., $v_k : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ sunt funcții continue cu $v_1(1) \cdots v_k(1) \neq 0$ avem următoarea egalitate

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{h(x)} \sum_{ij \leq x, (i,j) \in A \times B} \omega\left(\frac{ij}{x} \cdot v_1\left(\frac{\ln_1(ij)}{\ln_1 x}\right) \cdots v_k\left(\frac{\ln_k(ij)}{\ln_k x}\right)\right) v(i, j) \\ &= \int_0^1 \omega(x \cdot v_1(1) \cdots v_k(1)) dx. \end{aligned}$$

(iii) Dacă $v_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann, $v_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, ..., $v_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții continue atunci avem următoarea egalitate

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{h(x)} \sum_{ij \leq x, (i,j) \in A \times B} v_0\left(\frac{ij}{x}\right) v_1\left(\frac{\ln_1(ij)}{\ln_1 x}\right) \cdots v_k\left(\frac{\ln_k(ij)}{\ln_k x}\right) v(i, j) \\ &= v_1(1) \cdots v_k(1) \int_0^1 v_0(x) dx. \end{aligned}$$

În continuare vom da exemple non-triviale de funcții pentru care găsim evaluări asimptotice ale funcțiilor lor sumatorii duble. Pentru aceasta avem nevoie de următorul rezultat a lui E. Landau din 1900, a se vedea [19, p. 28] sau [20, paginile 203-205].

Teorema 3.2.6 Fie $F : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $F(\nu, x) \geq 0$ pentru $1 \leq \nu \leq x$; $\frac{F(\nu, x)}{\ln \nu} \geq \frac{F(\nu', x)}{\ln \nu'}$ pentru $2 \leq \nu \leq \nu' \leq x$ și $F(2, x) = o\left(\int_2^x \frac{F(u, x)}{\ln u} du\right)$.

Atunci $\sum_{p \leq x} F(p, x) \sim \int_2^x \frac{F(u, x)}{\ln u} du$.

Propoziția 3.2.7 Avem următoarele evaluări asimptotice:

- (i) $\text{card}\{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid ij \leq x\} \sim x \ln x$.
- (ii) $\text{card}\{(p, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid pj \leq x, p \text{ prim}\} \sim x \ln(\ln x)$.
- (iii) $\text{card}\{(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid pq \leq x, p \text{ prim}, q \text{ prim}\} \sim \frac{2x \ln(\ln x)}{\ln x}$.

Din Corolarul 3.2.5 și Propoziția 3.2.7 avem

Corolar 3.2.8 Pentru orice funcție integrabilă Riemann $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ avem următoarele egalități

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x \ln x} \sum_{ij \leq x, i \text{ natural}, j \text{ natural}} f\left(\frac{ij}{x}\right) &= \int_0^1 f(x) dx; \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x \ln(\ln x)} \sum_{pj \leq x, p \text{ prim}, j \text{ natural}} f\left(\frac{pj}{x}\right) &= \int_0^1 f(x) dx; \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x \ln(\ln x)} \sum_{pq \leq x, p \text{ prim}, q \text{ prim}} f\left(\frac{pq}{x}\right) &= 2 \int_0^1 f(x) dx. \end{aligned}$$

Corolar 3.2.9 Fie $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(i) Dacă $\omega : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann, $v_1 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, ..., $v_k : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ sunt funcții continue cu $v_1(1) \cdots v_k(1) \neq 0$, atunci avem următoarele egalități

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x \ln x} \sum_{ij \leq x, i \text{ natural}, j \text{ natural}} \omega\left(\frac{ij}{x} \cdot v_1\left(\frac{\ln_1(ij)}{\ln_1 x}\right) \cdots v_k\left(\frac{\ln_k(ij)}{\ln_k x}\right)\right) \\ &= \int_0^1 \omega(x \cdot v_1(1) \cdots v_k(1)) dx; \\ &\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x \ln(\ln x)} \sum_{pj \leq x, p \text{ prim}, j \text{ natural}} \omega\left(\frac{pj}{x} \cdot v_1\left(\frac{\ln_1(pj)}{\ln_1 x}\right) \cdots v_k\left(\frac{\ln_k(pj)}{\ln_k x}\right)\right) \\ &= \int_0^1 \omega(x \cdot v_1(1) \cdots v_k(1)) dx; \\ &\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x \ln(\ln x)} \sum_{pq \leq x, p \text{ prim}, q \text{ prim}} \omega\left(\frac{pq}{x} \cdot v_1\left(\frac{\ln_1(pq)}{\ln_1 x}\right) \cdots v_k\left(\frac{\ln_k(pq)}{\ln_k x}\right)\right) \\ &= 2 \int_0^1 \omega(x \cdot v_1(1) \cdots v_k(1)) dx. \end{aligned}$$

(ii) Dacă $v_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann, $v_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, ...,

$v_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții continue, atunci avem următoarele egalități

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x \ln x} \sum_{ij \leq x, i \text{ natural}, j \text{ natural}} v_0 \left(\frac{ij}{x} \right) v_1 \left(\frac{\ln_1(ij)}{\ln_1 x} \right) \cdots v_k \left(\frac{\ln_k(ij)}{\ln_k x} \right) \\
&= v_1(1) \cdots v_k(1) \int_0^1 v_0(x) dx; \\
& \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x \ln(\ln x)} \sum_{pj \leq x, p \text{ prim}, j \text{ natural}} v_0 \left(\frac{pj}{x} \right) v_1 \left(\frac{\ln_1(pj)}{\ln_1 x} \right) \cdots v_k \left(\frac{\ln_k(pj)}{\ln_k x} \right) \\
&= v_1(1) \cdots v_k(1) \int_0^1 v_0(x) dx; \\
& \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x \ln(\ln x)} \sum_{pq \leq x, p \text{ prim}, q \text{ prim}} v_0 \left(\frac{pq}{x} \right) v_1 \left(\frac{\ln_1(pq)}{\ln_1 x} \right) \cdots v_k \left(\frac{\ln_k(pq)}{\ln_k x} \right) \\
&= 2v_1(1) \cdots v_k(1) \int_0^1 v_0(x) dx.
\end{aligned}$$

Rezultatul următor este de alt tip decât cele demonstrate mai sus.

Corolar 3.2.10 Fie $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Atunci:

(i) pentru orice funcție integrabilă Riemann $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ avem următoarea egalitate

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x \ln^3 x} \sum_{ij \leq x} f \left(\frac{ij}{x} \right) d(i) d(j) = \frac{1}{6} \int_0^1 f(x) dx.$$

(ii) Dacă $\omega : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann, $v_1 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, ..., $v_k : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ sunt funcții continue cu $v_1(1) \cdots v_k(1) \neq 0$ avem următoarea egalitate

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x \ln^3 x} \sum_{ij \leq x} \omega \left(\frac{ij}{x} \cdot v_1 \left(\frac{\ln_1(ij)}{\ln_1 x} \right) \cdots v_k \left(\frac{\ln_k(ij)}{\ln_k x} \right) \right) d(i) d(j) \\
&= \frac{1}{6} \int_0^1 \omega(x \cdot v_1(1) \cdots v_k(1)) dx.
\end{aligned}$$

(iii) Dacă $v_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann, $v_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, ..., $v_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții continue avem următoarea egalitate

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x \ln^3 x} \sum_{ij \leq x} v_0 \left(\frac{ij}{x} \right) v_1 \left(\frac{\ln_1(ij)}{\ln_1 x} \right) \cdots v_k \left(\frac{\ln_k(ij)}{\ln_k x} \right) d(i) d(j) \\
&= \frac{1}{6} v_1(1) \cdots v_k(1) \int_0^1 v_0(x) dx.
\end{aligned}$$

3.2.2 Rezultate de tip dublu Riemann-Radoux

În continuare vom demonstra ceea ce noi numim rezultate duble de tip Riemann-Radoux, a se vedea [4, 27]. De data aceasta, ne concentrăm în principal pe unele cazuri particulare. Din Teorema 5 din [4] deducem

Corolar 3.2.11 *Fie $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea P_μ , $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$, $A, B \subseteq \mathbb{N}$ și $v : A \times B \rightarrow [0, \infty)$ astfel încât funcția sa sumatorie dublă este echivalentă cu h . Atunci:*

(i) *pentru orice funcție integrabilă Riemann $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ avem următoarea egalitate*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{ij \leq x, (i,j) \in A \times B} f\left(\frac{ij}{x}\right) (ij)^{1-\mu} v(i, j)}{x^{1-\mu} h(x)} = \mu \int_0^1 f(x) dx.$$

(ii) *Dacă $\mu \in (1, \infty)$, pentru orice funcție $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $x \rightarrow x^{\mu-1} f(x)$ este integrabilă Riemann avem următoarea egalitate*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{ij \leq x, (i,j) \in A \times B} f\left(\frac{ij}{x}\right) v(i, j)}{h(x)} = \mu \int_0^1 x^{\mu-1} f(x) dx.$$

În continuare vom demonstra câteva exemple concrete ale Corolarului 3.2.11.

Corolar 3.2.12 *Pentru orice funcție $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $x \rightarrow xf(x)$ este integrabilă Riemann, avem următoarea egalitate*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{ij \leq x} f\left(\frac{ij}{x}\right) \varphi(i) \varphi(j)}{x^2 \ln x} &= \frac{36}{\pi^4} \int_0^1 xf(x) dx. \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{ij \leq x} f\left(\frac{ij}{x}\right) d(i) \varphi(j)}{x^2} &= \frac{\pi^2}{6} \int_0^1 xf(x) dx. \end{aligned}$$

Bibliografie

- [1] T. APOSTOL, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, 1976.
- [2] U. Balakrishnan, Y.-F. S. Petermann, *Asymptotic Estimates for a Class of Summatory Functions*, Journal of Number Theory, 70, No. 1, 1-36 (1998).
- [3] P.T. BATEMAN, H.G. DIAMONDS, *Analytic number theory. An introductory course*, Monographs in Number Theory 1. River Edge, NJ: World Scientific, 2004.
- [4] M. BĂNESCU, D. POPA, *New extensions of some classical theorems in number theory*, Journal of Number Theory, 133, No 11, 3771-3795, 2013.
- [5] M. BĂNESCU, D. POPA, *Asymptotic evaluations for some double sums in number theory*, trimis spre posibila publicare la International Journal of Number Theory în 2014.
- [6] N. H. BINGHAM, C. M. GOLDIE, J. L. TEUGELS, *Regular variation*, Encyclopedia of Mathematics and its applications, 27, Cambridge University Press. XIX, 1987, 2nd ed., p/b, 1989.
- [7] N. H. BINGHAM, A. INOUE, *Abelian, Tauberian, and Mercerian theorems for arithmetic sums*, J. Math. Anal. Appl. 250, No. 2, 465-493, 2000.
- [8] A. BLANCHARD, *Initiation a la theorie analytique des nombres premiers*, Dunod Paris, 1969.
- [9] R. BOJANIC, E. SENETA, *A Unified Theory of Regularly Varying Sequences*, Math. Zeit. , 134, 91-106, 1973.
- [10] N. BOURBAKI, *Functions of a Real Variable: Elementary Theory*, Trans. din the 1976 French original by Philip Spain. Berlin: Springer, 2004.

- [11] R. CRISTESCU, *Notiuni de analiza funcțională liniară*, Editura Academiei Române, Bucuresti 1998.
- [12] T.H. GRONWALL, *Some asymptotic expressions in the theory of numbers*, Trans. Amer. Math. 14, 113-122, 1913.
- [13] J. HADAMARD, *Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques*, Bull. S. M. F. 24, 199-220, 1896.
- [14] G.H. HARDY, E.M. WRIGHT, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford at the Clarendon Press, 1960.
- [15] P. Halmos, *Measure theory*, Van Nostrand and Co., 1950.
- [16] E. HLAWEKA, *Über einen Satz von C. Radoux*, Mathematical structures, computational mathematics, mathematical modelling 2, Pap. dedic. L. Iliev 70th Anniv., 208-215, 1984.
- [17] A.E. INGHAM, *The distribution of prime numbers*, Cambridge Mathematical Library, 1964.
- [18] L. KUIPERS, H. NIEDERREITER, *Uniform distribution of sequences*, A Wiley-Interscience publication, 1974.
- [19] E. LANDAU, *Sur quelques problèmes relatifs à la distribution des nombres premiers*, Bull. S. M. F. 28, 25-38, 1900.
- [20] E. LANDAU, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1909.
- [21] B.M. MAKAROV, M.G. GOLUZINA, A.A. LODKIN, A.N. PODKO-
RYOTOV, *Selected problems in real analysis*, Transl. Math. Monographs, 107, A.M.S., 1992.
- [22] J.L. MAUCLAIRE, *Deux résultats sur les suites limite-périodiques*, Proc. Japan Acad., Ser. A, 63, 90-93, 1987.
- [23] C.P. NICULESCU, *Young Gauss meets dynamical systems*, The Mathematical Intelligencer, Springer Science+Business Media, LLC, 33, no.1 2011.
- [24] G. PÓLYA, *Über eine neue Weise bestimmte Integrale in der analytischen Zahlentheorie zu gebrauchen*, Göttingen Nachr. 149-159, 1917.
- [25] D. POPA, *Exercitii de analiză matematică*, Biblioteca Societății de Matematică din Romania, 2007.

- [26] D. POPA, *A double Mertens type evaluation*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 409, No 2, 1159-1163, 2014.
- [27] CH. RADOUX, *Note sur le comportement asymptotique de l'indicateur d'Euler*, Ann. Soc. Sci. Bruxelles, Sér. I, 91, 13-18, 1977.
- [28] E. SENETA, *Regularly varying functions*, Lecture Notes in Mathematics, No. 508. Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1976.
- [29] D. SURYANARAYANA, *The Number of k -ary Divisors of an Integer*, Monatshefte für Mathematik, 72, 445-450, 1968.
- [30] D. SURYANARAYANA, R. SITA RAMA CHANDRA RAO, *On an asymptotic formula of Ramanujan*, Math. Scand, 32, 258-264, 1973.
- [31] G. TENENBAUM, *Introduction to analytic and probabilistic number theory*, Cambridge University Press, 1995.
- [32] JACK P. TULL, *Average order of arithmetic functions*, Illinois Journal of Mathematics 5, 175-181, 1961.